Université des Sciences Sociales et de Gestion de Bamako (USSGB)

Faculté des Sciences Economiques et Gestion (FSEG)

Statistiques mathématiques

Travaux dirigés fiche N^0 1

Exercice 1

Il ya au moins une réponse exacte par question.

1. E et F deux ensembles finis
   a. $Card(E\times F) = Card\ (E)\times Card(F)$
   b. $Card(E\cup F) = Card\ (E) + Card(F)$
   c. Si $Card\ E \leq Card\ F\ \ alors\ \ E \subset F$
   d. $Card(E\cap F) \leq Card\ (E\cup F)$
2. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement sans remise k boules ($k \leq n$) dans cette urne. Le nombre de tirages possibles est. :
   a. n^k
   b. A_n^k
   c. C_n^k
   d. k^n
3. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire simultanément k boules ($k \leq n$) dans cette urne. Le nombre de tirages possibles est. :
   a. n^k
   b. A_n^k
   c. C_n^k
   d. k^n
4. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement avec remise k boules ($k \leq n$) dans cette urne. Le nombre de tirages possibles est. :
   $a.$ n^k
   $b.$ A_n^k
   $c.$ C_n^k
   $d.$ k^n

Exercice 2

Trouver le nombre d'issues des expériences suivantes :

1) Lancer de deux pièces équilibrées.
2) Lancer de deux dés parfaits.
3) Dans une urne contenant 100 jetons numérotés de 0 à 99, on tire 2 jetons successivement, en remettant après chaque tirage le jeton retiré dans l'urne.
4) Reprenez la question 3) mais le tirage est sans remise.
5) De combien de façons peut-on ranger n boules dans p tiroirs ?
6) De combien de façons peut-on garer 10 voitures dans un parking comprenant 20 places ?
7) Un représentant de commerce doit visiter les villes A, B, C, D et E. Combien y'a-t-il de trajets possibles ?
8) 32 élèves d'une classe se serrent la main. Déterminer le nombre de poignées de mains échangées.

9) On considère un jeu de 32 cartes. Déterminer
   a. Le nombre de mains de 8 cartes
   b. Le nombre de mains de 8 cartes contenant exactement un valet
   c. Le nombre de mains de 8 cartes contenant exactement 3 piques
   d. Le nombre de mains de 8 cartes contenant un valet et 3 piques
   e. Le nombre de mains de 8 cartes ne contenant aucun roi
   f. Le nombre de mains de 8 cartes contenant au moins un roi

10) Calculer $(2x+3)^5$ en utilisant $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$.

Exercice 3

QCM : Répondez par vrai (V) ou faux (F) les expressions suivantes :

1. Si X est une variable aléatoire continue, on a, quelque soient les réels a et b :
   a. $E(aX+b) = aE(X) + b$
   b. $Ecart\ type\ \sigma(aX+b) = a\sigma(X)$
   c. $p(X \geq a) \neq 1 - p(X < a)$
   d. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \neq 1$ (f est densité de probabilité)
2. Si X est une variable aléatoire discrète, on a, quelque soient les réels $a \neq 0$ et b
   a. $E(a) = 0$
   b. $Variance\ \ V(aX+b) = aV(X)$
   c. $V(X) = E^2(X) - (E(X))^2$
   d. $V(X) \neq E(X^2) - E^2(X)$
3. Soient deux événements A et B d'un même espace probabilisé tels que:

$$p(A) = 0{,}5; \quad p(B) = 0{,}2 \ \ et\ p(A \cap B) = 0{,}01$$

   a. Les événements A et B sont indépendants
   b. L'événement $A \cup B$ est certain
   c. $p(B/A) = 0{,}02$
4. Si X est une variable aléatoire continue, on a, quelque soient les réels a et b :
   e. $p(X = a) = 0$
   f. $p(a \leq X \leq b) \neq p(a < X < b)$
   g. $p(X > a) = p(X < a) - 1$
   h. $p(X \leq |a|) = 2p(X \leq a) - 1$

Travaux dirigés fiche N^0 2

Exercice 1

1. On considère des événements A et B indépendants tels que
 $p(A \cap B) = 0{,}5 \ \ et \ \ p(\bar{B}) = 0{,}4$
Calculer $p(B), p(A)\ et\ p(\bar{A} \cap \bar{B})$
2. Soient A et B deux événements A et B définis sur le même espace probabilisé et tels que :
 $p(A \cup B) = 0{,}7 \ \ et \ \ p(A) = 0{,}5$. Trouver $p(B)$, quand
   a. Les événements A et B sont incompatibles.
   b. Les événements A et B sont indépendants
   c. $p(B/A) = 0{,}5$

Exercice 2

Pour chaque expérience, calculer la probabilité demandée

a. Lancer de deux pièces équilibrées. Quelle est la probabilité de l'événement A « Obtenir pile et face » ?
b. Lancer de deux dés parfaits. On note x le numéro apparu sur l'un des dés et y le numéro apparu sur l'autre dé. Quelle est la probabilité de l'événement B « Obtenir $x+y < 4$ » ?
c. Dans une urne contenant 100 jetons numérotés de 0 à 99, on tire deux jetons successivement et avec remise. On note le couple de numéros obtenus (B_i, B_j) où B_i est le numéro du 1er jeton et B_j celui du 2eme jeton. Quelle est la probabilité de l'événement C « les deux jetons portent des numéros pairs » ?

Exercice 3

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Calculer les probabilités des événements suivants

A « d'avoir un as »

B « tirer une carte »

C « tirer un as de couleur rouge »

D « tirer un as ou une carte rouge »

E « la carte tirée n'est ni un as, ni une carte rouge ».

Exercice 4

On lance un dé uniforme et on a

$$p(1) = 0{,}12\ ; p(2) = 0{,}13; p(3) = 0{,}25; p(4) = 0{,}15; p(5) = 0{,}3; p(6) = 0{,}05$$

Quelle est la probabilité de A : « le numéro sorti est pair » ?

Exercice 5

Un sac contient 7 boules blanches, 5 boules rouges et 3 bleues. Quelle est la probabilité dans l'épreuve qui consiste à tirer simultanément 3 boules.

   a. de tirer 3 boules de même couleur ?
   b. de tirer 3 boules dont 2 au moins sont rouges ?
   c. de tirer 3 boules de couleurs différentes ?
   d. de tirer au moins une boule blanche sur les trois ?

Exercice 6

Une entreprise a ses sites de production repartis sur trois pays A, B et C. Cette entreprise a 4 sites de production dans le pays A, 6 dans le pays B et 9 dans le pays C. On cherche à sélectionner trois sites pour y installer des centres de recherche

1. de combien de façon peut-on choisir ces trios sites?
2. Quelle est la probabilité que chaque pays dispose d'un centre de recherche ?
3. Quelle est la probabilité qu'un seul pays dispose de tous les centres de recherche ?
4. Quelle est la probabilité que seulement deux pays disposent de centre de recherche ?

Exercice 7

Une expérience consiste à jeter ensemble un dé et une pièce de monnaie. On suppose que les différents résultats possibles de l'expérience sont équiprobables.

a. Soit A l'événement «on obtient avec le dé un numéro pair». Quelle est sa probabilité ?
b. Soit B l'événement « on obtient avec le dé un nombre multiple de 3, et avec la pièce la face marquée p ». Quelle est sa probabilité ?
c. Soit C l'événement « on obtient avec le dé un numéro multiple de 6 et avec la pièce de monnaie la face p ». Quelle est sa probabilité ?
d. Quelle est la probabilité de l'événement$A \cap B$.

Exercice 8

Dans une boîte, il ya dix cartons numérotés de 1 à 10.

a) On extrait simultanément trois cartons sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre 1, 2, 3 ?
b) On extrait simultanément trois cartons, quelle est la probabilité d'obtenir trois numéros multiples de 3 ? au plus un numéro multiple de 3 ?

Exercice 9

A la FSEG de Bamako, 75% des étudiants échouent en microéconomie, 45% échouent en mathématiques, et 40% échouent à la fois en microéconomie et en mathématiques. On choisit au hasard un étudiant.

1. Si l'étudiant a échoué en mathématiques, quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi échoué en microéconomie ?
2. Si l'étudiant a échoué en microéconomie, quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi échoué en mathématiques ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi échoué en mathématiques ou en microéconomie ?

Exercice 10

Deux usines produisent des pièces. La production de l'usine A est défectueuse à 5%. La production de l'usine B est défectueuse à 3%. L'usine A réalise 40% de la production totale.

1. Quel pourcentage de la production est défectueuse pour l'ensemble des deux usines ?
2. Si une pièce est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'usine A ?

Exercice 11

Un sac contient trois boules noires portant chacune le nombre 100 et deux boules blanches portant chacune le nombre 200.
On tire simultanément au hasard deux boules du sac et on désigne par X la variable aléatoire qui est égale à la somme des nombres que portent les deux boules tirées moins trois cents.

1) Etablir la loi de probabilité de X.
2) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
3) Déterminer la fonction de répartition de X.

Exercice 12
Une variable aléatoire prend ses valeurs dans {-1, 0, 2}, son espérance est 0 et sa variance est 1. Déterminer la loi de probabilité de cette variable.

Exercice 13
Une urne contient n boules blanches ($n \in N^*$), deux boules noires, trois boules rouges On extrait simultanément deux boules de l'urne (on suppose que les tirages sont équiprobables).

1) Déterminer les probabilités respectives $P_1, P_2 \; et \; P_3$d'obtenir
   a. Deux boules noires
   b. Aucune boule blanche
   c. Deux boules de couleurs différentes
2) Déterminer n pour que la probabilité P_2 soit égale à 2/11.
3) On prend n=*5*et on considère le jeu suivant :
   - Le tirage d'une boule noire rapport sept points.
   - Le tirage d'une boule rouge rapport deux points.
   - Le tirage d'une boule blanche perd deux points.

On désigne par X la variable aléatoire réelle qui à tout tirage de deux boules, associe le nombre points marqués.
Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire X et donner la loi de probabilité X.

Exercice 14
Dans un laboratoire on dispose de sept professeurs masculins et cinq féminins.

1) On choisit deux professeurs au hasard. Quelles sont les probabilités pour obtenir
   a. Deux hommes ?
   b. Deux femmes ?
   c. Un homme et une femme ?
2) Soit X la variable aléatoire réelle qui, à chaque tirage possible on fait correspondre le nombre d'hommes choisis. Quelle est la loi de probabilité, la fonction de répartition de la variable aléatoire X ?

FSEG /Travaux dirigés fiche N^0 3

Exercice 1:

Le nombre d'accidents par jour sur les « 30 mètres de la rive droite de Bamako » est une variable aléatoire qui suit une loi de poisson de paramètre 5.
Quelle est la probabilité d'avoir seulement 10 accidents sur cette route ?

Exercice 2

On suppose que la taille, en centimètres, d'un homme âgé de 30 ans est une variable aléatoire normale de paramètres $\mu = 175 \quad et\ \sigma^2 = 36$.
1) Quel est le pourcentage d'hommes de 30ans ayant une taille supérieure à 185 cm ?
2) Parmi les hommes mesurant plus de 180 cm, quel pourcentage dépasse 192 cm ?

Exercice 3 : *Application : coût de production, vente et bénéfice*

Une entreprise fabrique deux types de produits X et Y. Les ventes en produits X ou Y sont indépendantes et suivent chacune une loi normale.
Le nombre de ventes de produit X est en moyenne de 300 unités par an et il ya 95% de chances pour que les ventes se situent entre 200 et 400 unités.
Les coûts de production en produits X se repartissent de la façon suivante :

- Frais fixes 50 000F ;
- Coûts variables : 2 000F par unité produite.

Le prix de vente unitaire d'un produit X est fixé à 7 000F l'unité. Par ailleurs, on sait que le bénéfice réalisé sur les ventes des produits Y suit une loi normale de moyenne 500 000F et d'écart type 100 000F.
On demande de déterminer ;
1. Le seuil de rentabilité en nombre de produits X ;
2. La loi de probabilité et les paramètres des variables aléatoires suivantes :
   - X = quantités vendues de produits X ;
   - CX = coût de production des quantités X ;
   - BX= bénéfice réalisé par la vente de produits X ;
   - B= bénéfice total réalisé par la vente des produits X ou Y.
3. La probabilité pour que le bénéfice total soit compris entre 1 600 000 et 2 300 000 francs.

Exercice 4: *vente et bénéfice*

1) Le nombre de vente journalière d'un article A est une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne m=3500 et d'écart type σ = 600. Le bénéfice journalier exprimé en francs, réalisé par le fabricant sur la vente de l'article A, est une variable aléatoire B qui suit une loi normale et qui s'exprime en fonction de X par B=X-3400
a) Donner les paramètres de cette loi.
b) Donner la probabilité pour que B soit inferieur à 100.
2) Etude du bénéfice sur une période de 300 jours : on suppose que la vente de l'article s'effectue dans les mêmes conditions que précédemment, sur une période de 300 jours ouvrables, et que les bénéfices journaliers sont indépendants les uns des autres.

Le bénéfice total réalisé pendant ces 300 jours est une variable aléatoire que l'on note S. on admet que S suit une loi normale.
a) Donner les paramètres de cette loi.
b) Donner la valeur décimale approchée à 10^{-2} pris par défaut de la probabilité pour que S soit positif.

Exercice 5 : *Erreurs de mesure*

Les erreurs de mesure liées à une expérience suivent une loi normale de moyenne nulle et d'écart type σ.
a) Calculer σ sachant que la valeur absolue de l'erreur est supérieure à 0,1 dans 10% des cas.
b) Quelle est la probabilité pour que l'erreur soit en valeur absolue supérieure à 0,2 ?
c) Trouver le nombre *a* tel que la probabilité pour que l'erreur soit inferieure à *a* soit de 95%.

Exercice 6: Rentabilité publicitaire

Un spot publicitaire touche à peu près 5 millions de foyers. Ce spot a coûté en réalisation et en diffusion 2 millions de francs. Suite à la campagne publicitaire 1 foyer sur 1000 en moyenne passe commande du produit promotionné. La vente d'un produit rapporte, tous frais de production déduits, 2000 F à l'entreprise. Calculer la probabilité pour que le bénéfice tiré de cette opération publicitaire soit :
a) positif
b) supérieur à 7millions de francs ?