Chapitre 4 : Les lois usuelles

1. Lois discrètes usuelles

1.1. Loi de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues possibles : ***succès et échec***. Elle représente toute une alternative dans laquelle une issue est codée 0 (échec) et l'autre codée 1 (succès). On a alors une variable aléatoire $X(\Omega) = \{0,1\}$

Notons P la probabilité de succès, 1- p = q de l'échec, on a la loi de probabilité

$$\boldsymbol{p(X = x) = p^{x} q^{1-x}} \ , \ \ \boldsymbol{x = 0, 1}$$

$$p(X = 0) = q = 1 - p \quad , \ p(X = 1) = p$$

$$\boldsymbol{E(X)} = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = \boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{V(X)} = E(X^2) - E(X)^2 = [p \times 1^2 + q \times 0^2] - p^2 = \boldsymbol{pq}$$

$$\boldsymbol{\sigma(X)} = \sqrt{\boldsymbol{pq}}$$

1.2. Loi de Binomiale

Considérons une répétition de ***n*** épreuves de Bernoulli indépendantes et de même probabilité de succès ***p***.

La variable aléatoire X égale au nombre de succès suit une loi appelée loi binomiale de paramètre ***n*** et ***p***. On écrit $\mathfrak{B}(n, p)$.

$X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n$ où $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \in [0, n]$

$p(X = k \text{ succès}) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ où $k \in [0, n]$

$$\begin{cases} n = nombre\ d'\text{épreuves} \\ k = nombre\ de\ \text{succès} \\ n - k = nombre\ d'\text{échec} \\ p = probabilit\text{é}\ de\ \text{succès} \\ q = 1 - p = probabilit\text{é}\ d'\text{échec} \end{cases}$$

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$
$$= p + p + \cdots + p = np$$

$$\boldsymbol{E(X) = np}$$

$$V(X) = V(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$$
$$= pq + pq + \cdots + pq = npq = np(1 - p)$$

$$\boldsymbol{V(X) = npq = np(1 - p)}$$

$$\boldsymbol{\sigma(X)} = \sqrt{\boldsymbol{npq}} = \sqrt{\boldsymbol{np(1 - p)}}$$

NB : *Pour n = 1, on retrouve la loi Bernoulli*

Exemple 1 :

Une urne contient 18 boules blanches et 12 boules noires. On tire au hasard une boule dans l'urne. X vaut 1 si la boule tirée est blanche et 0 si la boule tirée est noire. Calculer E(X) et V(X)

Exemple 2

Un magasin reçoit chaque jour d'un grossiste, une quantité constante de produit A. La probabilité pour jour donné, le grossiste ne livre pas le produit A est de 2%.

a) Calculer dans ces conditions la probabilité pour que le magasin soit approvisionné au moins 235 jours sur 240 jours ouvrables dans l'année.
b) Quelle est la durée moyenne dans l'année pendant laquelle on peut s'attendre à ne pas trouver le produit A dans le magasin ?

Réponse
a) Soit X une variable aléatoire égale au nombre jours de non approvisionnements du produit A. En admettant que chaque jour les livraisons sont indépendantes les unes des autres, X suit une loi binomiale de paramètre *n = 240 et p = 0,02.*

$$\boldsymbol{p(X \leq 5) = p(X = 0) + p(X = 1) + \cdots + p(X = 5)}$$

$$\boldsymbol{= \sum_{k=0}^{5} C_{240}^{k} \times (0,02)^{k} \times (0,98)^{240-k} = 0,65}$$

La probabilité pour le magasin d'être approvisionné au moins 235 jours dans l'année est relativement faible.
b) $\boldsymbol{E(X) = np = 240 \times 0,02 = 4,8\, jours}$
Avec un écart type $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{240 \times 0,02 \times 0,98} = 2,17\, jours}$
Le produit A ne sera pas livré dans une fourchette de 2 à 7 jours par an.

1.3 Fréquences des succès dans une succession de n épreuves de Bernoulli

Soit $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ les n variables aléatoires associées à une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même probabilité de succès p. La somme $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n$ est la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus à l'issue des n épreuves. On sait que S_n suit la loi binomiale d'espérance mathématique np et d'écart type $\sqrt{npq}$, où $q = 1 - p$ est la probabilité de l'échec.
Notons $F_n = \frac{nombre\ de\ succès}{nombre\ d'épreuves}$

- L'espérance mathématique F_n

$E(F_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} E(S_n) = \frac{1}{n} \times np = p$ (Indépendante de n)

- L'écart type F_n

$$\sigma(F_n) = \sqrt{V(F_n)} = \sqrt{V(\frac{S_n}{n})} = \sqrt{\frac{1}{n^2} V(S_n)} = \sqrt{\frac{1}{n^2} \times npq} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

L'écart type de la fréquence des succès dépend du nombre d'épreuves n.

$$\lim_{n \to +\infty} \sigma(F_n) = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{pq}{n}} = 0$$

1.4 Estimation : Esperance et variance d'une moyenne de variables aléatoires

Soit $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ les n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et dont la moyenne μ et la variance σ^2 existent et sont finies, alors si

$\boldsymbol{\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i}$**, on a**

$$\boldsymbol{E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}(\mu + \mu + \cdots + \mu) = \frac{n}{n}\mu = \mu}$$

$$\boldsymbol{V(\overline{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} V(X_i)\right) = \frac{1}{n^2}(\sigma^2 + \cdots + \sigma^2) = \frac{1}{n}\sigma^2 = \mu}$$

1.5 Loi uniforme sur [1,n]

Soit X une variable aléatoire et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X est une loi uniforme sur [1, n] lorsque X admet une loi constante sur [1, n].

Propriétés

$$\forall k \in [1, n],\ \ p(X = k) = \frac{1}{n}$$

Alors Espérance $E(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \boldsymbol{\frac{n+1}{2}}$

Variance $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{(n+1)^2}{4} = \boldsymbol{\frac{n^2-1}{12}}$

1.6 Loi géométrique

Soit $p \in]0,1[, et\ q = 1 - p$. On dit que la v.a.X suit la loi géométrique de paramètre p lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p(X = n) = pq^{n-1}$$

(Il ya eu *n-1* échecs avant d'obtenir le succès au k^{eme} essai).

De fonction de répartition :

$$p(X \leq n) = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}p = p\sum_{k=0}^{n-1} q^k = p\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = 1 - q^n$$

Propriétés

$$E(X) = \frac{1}{p} \ \text{ et } \ V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

1.7 Loi de pascal

La loi de pascal est la généralisation de la loi géométrique pour la k^e fois du résultat considéré. On dit que la variable aléatoire X suit la loi de Pascal lorsque

$$p(X = i) = C_{k-1}^{i-1}p^k(1 - p)^{i-k} \quad pour\ i \geq k$$

Propriétés

$$E(X) = \frac{k}{p} \ \text{ et } \ V(X) = \frac{q}{p^2} = k\left(\frac{1-p}{p^2}\right)$$

Pour une loi de pascal, généralisant la loi géométrique, c'est le nombre total d'épreuves, et non pas le nombre d'épreuves conduisant au résultat de probabilité *p* qui est aléatoire, qui interviennent au contrôle de qualité, mais aussi dans la surveillance des événements dont une certaine fréquence de survenue est interprétée en terme de signal d'alarme.

1.8 Loi hypergéométrique

Soient N et n dans $\mathbb{N}^*$, et p dans [0,1] tels que N.p soit un entier. On dit que la variable aléatoire réelle X suit la loi hypergéométrique de paramètres $N, n\ et\ p$, lorsque

$$\forall\ \mathrm{k} \in [0, \mathrm{n}], \mathrm{P(X = k)} = \frac{\mathrm{C_{N.p}^{k} C_{N.q}^{n-k}}}{\mathrm{C_{N}^{n}}}$$

Propriétés

$$E(X) = np, \text{ et } \ V(X) = np.q\,\frac{N-n}{N-1}$$

1.9. Loi de poisson

La loi de poisson est un modèle représentatif de données statistiques discrètes pour lesquelles la variable ne prend que des valeurs entières positives ou nulles.

Une variable aléatoire X suit une loi de poisson de paramètre $m > 0$ si X ne prend que des valeurs entières positives ou nulles et si : $p(X = k) = e^{-m}\frac{m^k}{k!}$ et $\sum_{k\geq 0} p(X = k) = 1$

- Sa fonction de répartition est définie par :

$$F(X) = p(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} p(X = i) = \sum_{i=0}^{k} e^{-m}\frac{m^i}{i!}$$

- Pour le calcul de l'espérance mathématique, variance et écart type, les valeurs prises par X sont en nombre infini

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X = k)k = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-m}\frac{m^k}{k!}k$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-m}\frac{m^k}{(k-1)!} = e^{-m}m\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{m^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$E(X) = e^{-m}m\sum_{t=0}^{+\infty}\frac{m^t}{t!}$$

Or $\sum_{t=0}^{+\infty}\frac{m^t}{t!} = 1 + \frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \cdots = e^m$

Donc $\boldsymbol{E(X) = e^{-m}me^{m} = m}$

$\boldsymbol{V(X) = m \;\; et \;\; \sigma(X) = \sqrt{m}}$

- Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de poisson de paramètres *m et n*, alors la somme *X+Y* suit une loi de poisson de paramètre *m+n.*

C'est-à-dire $\boldsymbol{X \sim p(m)}$ ***et*** $\boldsymbol{Y \sim p(n) \;\; alors \quad X + Y \sim p(m + n)}$

1.10 Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Dans la loi binomiale deux paramètres *n et p* interviennent. Ce qui peut compliquer le calcul des probabilités notamment lorsque *n* devient grand *et p* petit. Dans ce cas on peut approcher la loi Binomiale $\mathfrak{B}(n, p)$ par la loi de poisson ayant la même espérance mathématique.

Dans la pratique, on admet que cette approximation est satisfaisante lorsque

$n \geq 30, p \leq 0{,}1 \; et \; np \leq 15 \; ou \; np \leq 10$

Exemple 1

Une usine possède 50 machines. La probabilité qu'une machine tombe en panne au cours d'une journée est 0,05.

La variable aléatoire X mesurant le nombre de machines en panne au cours d'une journée suit une loi binomiale de paramètre *n = 50, p=0,05 et de moyenne np=2,5.*

Calculer la loi binomiale $p(X = k)$ *et la loi de poisson de paramètre m=2,5 pour k variant de 0 à 6. Que constatez-vous de ces deux résultats ?*

- **Loi binomiale** $\boldsymbol{p(X = k) = C_{50}^{k}(0{,}05)^{k}(0{,}95)^{50-k}}$

- **Loi de poisson** $p(X = k) = e^{-2,5}\frac{2,5^k}{k!}$

Exemple 2

La proportion des déchets dans une production est égale à 2 pour 1000 unités produites. Dans ce lot de 1000 unités, quelle est la probabilité d'avoir 2 déchets exactement. Comparer les résultats obtenus par les 2 lois.

- Loi binomiale $p(X = 2) = C_{1000}^{2}(0,002)^2(0,998)^{998}$
- Loi de poisson $p(X = 2) = e^{-2}\frac{2^2}{2!}$ $puisque\ m = np = 0,002\times1000 = 2.$

Tableau récapitulatif des lois usuelles discrètes

Lois	Loi de probabilité	Esp. Math	Variance	Ecart type	Observations
Bernouilli $\mathfrak{B}(1, p)$.	$p(X = x) = p^x q^{1-x}$, $x = 0, 1$	p	*Pq=p(1-p)*	$\sqrt{pq}$	***p* est succès** ***q* est échec**
Binomiale $\mathfrak{B}(n, p)$.	$p(X = k \text{ succès}) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	np	*nPq=np(1-p)*	$\sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)}$	***p* est succès** ***q* est échec** ***n* nbre épreuves**
Uniforme *sur [1,n]*	$p(X = k) = \frac{1}{k}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$	$n \in \mathbb{N}^*$
Géométrique ou Pascal	$p(X = n) = pq^{n-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$	$\sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$	$p \in]0,1[$
Hypergéométrique	$\mathrm{P(X = k)} = \frac{\mathrm{C_{N.p}^{k} C_{N.q}^{n-k}}}{\mathrm{C_N^n}}$	np	$np.q\frac{N-n}{N-1}$	$\sqrt{np.q\frac{N-}{N-}}$	N et n $\in \mathbb{N}^*$
Poisson	$p(X = k) = e^{-m}\frac{m^k}{k!}$	m	M	$\sqrt{m}$	$m > 0$ et $k \geq 0$

- $Si\ X \sim \mathfrak{B}(n, p)\ et\ Y \sim \mathfrak{B}(m, p)\ \ alors\ \ \ X + Y \sim \mathfrak{B}(m + n, p)$
- $Si\ X \sim p(m)\ et\ Y \sim p(n)\ \ alors\ \ \ X + Y \sim p(m + n)$

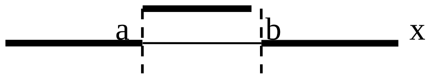
2. Lois continues usuelles

Les lois continues sont caractérisées à l'aide des fonctions de densité. Théoriquement, une variable aléatoire continue doit pouvoir prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle donné. De même il est possible d'approximer certaines lois discrètes à l'aide des lois continues.

2. 1. Loi uniforme

Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle [a, b] si elle admet pour densité la fonction f définie sur ℝ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si \quad x \in [a\,, b] \\ 0 & si \quad x \notin [a\,, b] \end{cases}$$



On vérifie que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b-a} dt = 1$$

Il est aisé de calculer **la fonction de répartition**

- Si $x \leq a \quad F(x) = 0$
- Si $a \leq x \leq b \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$
- Si $x \geq b \quad F(x) = 1$

Esperance mathématique

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{a}^{b} \frac{t}{b-a} dt = \frac{a+b}{2}$

Puisque la loi uniforme continue est symétrique, la moyenne et la médiane sont égales au milieu de [a, b].

Variance

$$\boldsymbol{V(X)} = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt - (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} t^2 dt = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Ecart type $\sigma(X) = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$

2.2. Loi exponentielle

C'est comme si on se place dans un phénomène d'attente et on s'intéresse à la variable aléatoire qui représente le temps d'attente entre deux événements successifs ou encore une durée de vie.

- Une variable aléatoire continue X suit une loi exponentielle de paramètre $\boldsymbol{\lambda}$ ($\boldsymbol{\lambda} > 0$) si sa fonction de répartition a pour densité f telle que :

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{\lambda e^{-\lambda x}} & \boldsymbol{si\ x \geq 0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{si\ x} < 0 \end{cases}$$

On vérifie que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

On peut représenter graphiquement la fonction densité puis la fonction de répartition F de X.

- **Esperance mathématique**

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{0}^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\boldsymbol{\lambda}}$$

- **Variance**

$$\boldsymbol{V(X)} = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt - \frac{1}{\boldsymbol{\lambda}^2} = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} t^2 dt - \frac{1}{\boldsymbol{\lambda}^2} = \frac{1}{\boldsymbol{\lambda}^2}$$

- $\boldsymbol{Ecart\ type} \quad \boldsymbol{\sigma(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}$

Exemple

Soit la fonction f définie par :

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{0\ si\ x} < 0 \\ \boldsymbol{2e^{-3x}} & \boldsymbol{Si\ 0 \leq x \leq 1} \\ \boldsymbol{e^{-x+1}\ \ Si\ 1 \leq x} < +\infty \end{cases}$$

Si possible, calculer l'espérance et la variance.

2.3 Lois GAMMA

2.3.1 Rappel : La fonction GAMMA d'Euler

Pour tout t >0, on note $\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}dx$

Γ ainsi définie (dite gamma d'Euler) est une application de $\mathbb{R}_+^*\ vers\ \mathbb{R}_+^*$, de plus :

- Gamma vérifie la relation fonctionnelle $\forall\ t > 0, \Gamma(t+1) = t\ \Gamma(t)$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^n dx = n!$

  $avec\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(1) = 1$

1.3.2 Définition

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Une variable aléatoire réelle X définie sur l'espace probabilisé et a valeurs dans $]0, +\infty[$ suit une loi de Gamma de paramètre t, si X admet comme densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x \leq 0 \\ \dfrac{e^{-x}x^{t-1}}{\Gamma(t)} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Soit La variable Gamma X de paramètres $t\ et\ \boldsymbol{\lambda}\ \boldsymbol{\epsilon}\mathbb{R}_+^*$ a une densité de probabilités et une fonction de répartition

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x \leq 0 \\ \dfrac{\lambda^t e^{-\lambda x}x^{t-1}}{\Gamma(t)} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- **Propriétés**

$$E(X) = \frac{t}{\lambda}\ et\ V(X) = \frac{t}{\lambda^2}$$

En particulier $si\ \lambda = 1\ ,\ alors\ E(X) = t = V(X)$

2.4 Lois BETA

2.4.1 Rappel : La fonction Beta d'Euler

$$pour\ a\ et\ b \in \mathbb{R}_+^*, on\ note: \beta(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$$

β ainsi definie est une application de $(\mathbb{R}_+^*)^2\ vers\ \mathbb{R}_+^*$ vérifiant

- $\forall\ (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2\ \ \beta(a,b) = \beta(b,a)$
- $\beta(a+1,b) = \frac{a}{b}\beta(a,b+1) = \frac{a}{a+b}\beta(a,b)$
- $\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

2.4.2 Définition

Une variable aléatoire réelle X définie sur l'espace probabilisé et a valeurs dans [0,1] suit une loi de Beta de paramètres a et b, si X admet comme densité f et fonction de répartition définies par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{a-1}(1-t)^{b-1}}{\beta(a,b)} & si\ t \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Ou encore

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+b)t^{a-1}(1-t)^{b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b} & si\ t \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- **Propriétés**

  Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, X suivant une loi Beta de paramètres a et b. Alors

$$E(X) = \frac{a}{a+b};\ \ V(X) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$$

2.5 Loi Normale

Une variable aléatoire X suit la loi normale (Loi gaussienne, Loi de Laplace-Gauss), lorsqu'elle est formée à partir d'un grand nombre de facteurs s'additionnant les uns aux autres, aucune ne jouant un rôle prédominant, et agissant de manière indépendante.

La loi normale est paramètre par la moyenne μ et l'écart type σ.On note$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Sa fonction densité est $f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Chapitre V : Loi normale et ses lois dérivées

1. Loi normale et Fonction de répartition

1.1 Courbe en cloche

- Etude de la fonction $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

  La courbe obtenue, en forme de cloche, va jouer un rôle fondamental dans la définition de la loi normale.
- D'après le célèbre mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

  Effectuons le changement de variable suivant

$$t = \sqrt{2}x, \;\; dt = \sqrt{2}dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2} e^{-x^2} dt = 1$$

  Ce qui permet de considérer que la fonction f comme une fonction densité de probabilité.

1.2. La loi normale $\boldsymbol{\mathcal{N}(\mu, \sigma)}$

Une variable aléatoire X continue suit une loi normale de paramètre $\mu \; et \; \sigma$ si sa fonction de répartition a pour densité f où

$$f_{\mu,\sigma}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{pour tout réel t}$$

On vérifie que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,\sigma}(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = 1$ par changement de variable.

2. La loi normale centrée réduite $\boldsymbol{\mathcal{N}(0, 1)}$

Une variable aléatoire X continue suit une loi normale Standard de paramètre $0 \; et \; 1$, appelée loi normale centrée réduite si sa fonction de répartition a pour densité f :

$$f_{0,1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

On note Π sa fonction de répartition, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

- Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, alors la variable aléatoire $T = \frac{(X-\mu)}{\sigma}$ suit loi normale centrée réduite, de fonction de répartition

$$F_T(x) = p(T \leq x) = p\left(\frac{(X-\mu)}{\sigma} \leq x\right) = p(X \leq x\sigma + \mu) = F_X(x\sigma + \mu)$$

$$F_T(x) = \int_{-\infty}^{x\sigma+\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

En effectuant un changement de variable (par exemple $v = \frac{(t-\mu)}{\sigma}$) on aura alors

$$F_T(x) = \int_{-\infty}^{x\sigma+\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-v^2}{2}} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \int_{-\infty}^{x} f_{0,1}(t) dt$$

3. Fonctions génératrices des moments

Cette fonction permet de regrouper le calcul de l'intégralité des moments d'une loi, s'ils existent. Si X est une variable aléatoire qui admet pour fonction de densitéf_X, on appelle fonction génératrice des moments.

$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} dF_X$ où F est la fonction de répartition de X

Propriété :

- $M_{aX+b}(t) = e^{bt}E(e^{tX}) = e^{bt}M_X(at), \; a \; et \; b \; sont \; deux \; constantes$
- $M'_X(0) = E(X)$ (dérivée première)
- $\boldsymbol{M''_X(0) = E(X^2)}$ (dérivée seconde).

Exemples

- La fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire normale $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}+tx} dx$$

$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2+\frac{t^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}+\frac{t^2}{2}} dv \qquad avec \; v = x - t$

Donc $\boldsymbol{M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = e^{\frac{t^2}{2}}}$

- On pourrait procéder de la même manière pour la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire normale $X \sim \mathcal{N}(u, \sigma)$ et obtenir

$$\boldsymbol{M_X(t) = E(e^{tX})} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}+tx} dx = \boldsymbol{e^{ut} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}}$$

4. Caractéristiques de la loi normale

4.1 Esperance mathématique, variance et écart type

- Esperance mathématique, variance et écart type de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

$$E(X) = 0, \qquad V(X) = 1 \;\; et \;\; \sigma(X) = 1$$

- Esperance mathématique, variance et écart type de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

$$E(X) = \mu, \qquad V(X) = \sigma^2 \;\; et \;\; \sigma(X) = \sigma$$

4.2. Propriétés

Soit T une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, de fonction de répartition notée Π

- $\Pi(t) = p(T \leq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$
- $\Pi(-t) = p(T \leq -t) = p(T \geq t) = 1 - p(T \leq t)$ par complémentarité
  D' où $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$, $p(T \leq -t) = 1 - p(T \leq t)$

  $p(a \leq T \leq b) = \Pi(b) - \Pi(a)$

  en particulier $p(-a \leq T \leq a) = 2\Pi(a) - 1$

Remarques

- En loi continue on ne distingue pas $< et \ \leq$
- Lorsque les valeurs des probabilités ne figurent pas dans la table, on utilise les valeurs de t négatives. $p(T \leq -t) = 1 - p(T \leq t) = p(T \geq t)$

Exercice 1

Soit T une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

1) Calculer $p(T < 0)$; $p(T < 2{,}04$; $p(T < -1{,}95$; $p(-1 < T < 2)$; $p(-3 < T < -1)$; $p(|T| < 1)$ et $p(|T| > 1)$
2) Dans chaque, déterminer le réel *t telque*

$$\mathrm{p}(\mathrm{T} < t) = 0{,}8283;\ \mathrm{p}(\mathrm{T} < t) = 0{,}1112\ ;\ \mathrm{p}(0 < T < t) = 0{,}4878$$

Exercice 2

1) X suit une loi normale$\mathcal{N}(1, 2)$, calculer $p(X \geq 2)$
2) Calculer $p(X \leq 6)$ et $p(X \leq 4$, pour X suivant $\mathcal{N}(5, 2)$
3) Calculer $p(4 \leq X \leq 6)$, pour X suivant $\mathcal{N}(5, 2)$
4) X suit la loi normale $\mathcal{N}(5, 2)$, pour quelle valeur de x a-t-on

$$p(X \leq x) = 0{,}95\ ?$$

4.3. Lois normales et opérations

Etant donne deux variables indépendantes X_1 et X_2.
Si X_1suit loi normale $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et X_2 suit loi normale $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$, alors
$X_1 + X_2$, suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu_1 + \mu_2,\ \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$
$X_1 - X_2$, suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu_1 - \mu_2,\ \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$
Si une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètre μ et σ, alors *a X+b* suit une loi normale$\mathcal{N}(a\mu + b,\ \ |a|\sigma)$.

Note :
En règle générale, on admet que l'on peut approcher la loi binomiale $\mathfrak{B}(n, p)$ par la loi normale $\mathcal{N}\left(np, \sqrt{npq}\right)$ lorsque :

$$n \geq 30 \quad np \geq 5 \quad npq \geq 5$$

En approximant une loi binomiale par une loi normale on passe d'une loi discrète à une loi continue.
Les erreurs de mesure liées à une expérience suivent une loi normale de moyenne nulle et d'écart type σ.

5. Les lois dérivées de la loi normale

5.1 Loi de khi-deux

Si $X_1, \cdots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi normale centrée réduite, alors la quantité $X = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ est une variable aléatoire qui suit une loi de khi-deux à n degrés de liberté ($\boldsymbol{X \sim \chi_n^2}$).

Elle est aussi une variable Gamma de paramètres $t = \frac{n}{2}$ et $\boldsymbol{\lambda = \frac{1}{2}}$ **de**

densité de probabilité $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} x^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})} & si\ x \geq 0,\ n \geq 2 \end{cases}$

Fonction de répartition $F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Propriétés

- $E(X) = \frac{t}{\lambda} = n; \quad V(X) = \frac{t}{\lambda^2} = 2n$

  Donc $X \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{n}, \sqrt{\boldsymbol{2n}})$
- Si $X_1 \sim \chi_{n_1}^2, X_2 \sim \chi_{n_2}^2$ $et\ si\ X_1\ et\ X_2\ \ sont\ independantes\ alors$

$$X_1 + X_2 \sim \chi_{n_1+n_2}^2$$

Loi de Student

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes,$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et$Y \sim \boldsymbol{\chi_n^2}$**,** alors la quantité $T = \frac{X\sqrt{n}}{Y}$ est une variable aléatoire qui suit la loi de Student de *n* degrés de liberté ($T \sim T_n$).

Cette loi de Student a respectivement une densité de probabilité et une fonction de répartition :

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{(n-1)}{2}} \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Propriétés

$$E(T) = 0\ si\ n > 1; \quad V(T) = \frac{n}{n-2}\ \ si\ n > 2$$

Donc $T \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \sqrt{\boldsymbol{\frac{n}{n-2}}})$

Loi de Fischer- Snedecor

Si $X_1 \sim \chi_{n_1}^2, X_2 \sim \chi_{n_2}^2$ $et\ si\ X_1\ et\ X_2\ \ sont\ independantes\ alors$ la quantité $F = \frac{X_1/n_1}{X_2/n_2}$ est une variable aléatoire qui suit la loi de Fischer- Snedecor à $n_1 et\ n_2$ degrés de liberté ($F \sim F_{n_1,n_2}$).

Attention à l'ordre de paramètres $n_1 et\ n_2$.

Cette loi de Fischer a une densité de probabilité et une fonction de répartition.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2}) m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \times \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}} & x \geq 0 \\ 0 \quad autrement & \end{cases}$$

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Propriétés

$E(F) = \frac{n}{n-2} \qquad et \quad V(F) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-4)(n-2)^2}$

Donc $F \sim \mathcal{N}(\frac{n}{n-2}, \sqrt{\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-4)(n-2)^2}})$