UNIVERSITE DES SCIENCES SOCIALES ET DE GESTION DE BAMAKO (USSGB)
FACULTE DES SCIENCES ECONOMIQUES ET DE GESTION (FSEG) / Bamako

UNITE D'ENSEIGNEMENT: Statistiques-Probabilités

Semestre 2/ L1

Table des matières

2. **Lois usuelles continues**
    2.1. Loi uniforme continue
    2.2. Loi exponentielle
    2.3. Loi Gamma
    2.4. Loi Bêta
    2.5. Loi normale

Chapitre 5 : Loi normale et ses lois dérivées

1. Fonction de répartition
2. Loi normale centrée et réduite
3. Fonction génératrice des moments
4. Caractéristiques d'une loi normale
5. Calcul des quantiles
6. Lois dérivées de la loi normale : Loi de Khi-Deux ; Loi de Student; Loi de Fisher.

Chapitre 6 : Couple aléatoire

1. Définition et typologie des couples aléatoires
2. Fonction de répartition conjointe
3. Couple aléatoire discret
4. Couple aléatoire absolument continu
5. Les caractéristiques d'un couple aléatoire.
6. Extension au cas multidimensionnel : Vecteurs aléatoires

Chapitre 7 : Théorèmes limites

1. Inégalités de Bienaymé-Tchebychev ;
2. Convergence en probabilité ;
3. Convergence en moyenne quadratique ;
4. Loi faible de grands nombres ;
5. Convergence en loi ;
6. Théorème central limite;

L'équipe pédagogique de la FSEG remercie par avance ceux qui voudront bien la faire part de leurs remarques et suggestions.

Bibliographie

Anne-Marie Spallanzani, probabilité et statistiques pour la gestion et l'économie.
Benjamin JOURDAIN, Cours de Probabilités et statistique 12 juin 2012
C. Larcher et M. Pariente, Statistique et Probabilités, collection dirigée par Claude LOBRY, 1993.
Bernard Grais Dunod, Méthodes statistiques.
Bernard Goldfard & Catherine Pardoux, Introduction a la méthode statistique, Statistique et probabilités, 7e Edition, CAMPUS LMD.
Christophe Hurlin / Valérie Mignon, Statistique et probabilité en Eco-gestion.
Eva Cantoni SPRINGPER, Maitrise I, Variable aléatoire, exercices résolus et probabilités et statistiques, 2006.
***G.* COSTANTINI**, Probabilités: généralités-conditionnement-indép. http://bacamaths.net/
Jean GUEGAND et Jean Pierre GAVINI, Probabilités / BCPST, 1ere et 2eme Années premier cycle universitaire.
Jean Pierre LECOUTRE, Statistiques et probabilités, cours et exercices corrigés. 5eme Edition Dunod.
Jean Pierre LECOUTRE, TD Statistiques et probabilités, 6eme Edition Dunod.
Mathieu Gentes, Probabilités et Statistiques, Tome 1, Année 2009/2010, IUT d'Orsay
Olivier François, Notes de cours de Probabilités Appliquées
Pierre Dreyfuss, Statistiques et probabilités appliquees , cours et exercices et travaux pratiques.
Ricco Rakotomalala, Notes de cours Probabilités et Statistique, Université Lumière Lyon
Walder Masieri, Statistiques et calcul des probabilités: Travaux pratiques énoncés et solutions, 6eme Edition 1994.

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire élabore des méthodes pour résoudre des problèmes de dénombrement d'objets ou de personnes pris dans un ensemble fini.

1. Le langage des ensembles finis

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble fini E, $\bar{A}$ le complémentaire de A

$$\begin{cases} x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \\ x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B \\ x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A \ (A \cup \bar{A} = E \text{ et } A \cap \bar{A} = \emptyset) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in B) \\ A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \\ A \text{ et } B \text{ sont disjoints si } A \cap B = \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \\ A - B = A \cap \bar{B} \\ A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \\ (A \cap \bar{B}) \cap (A \cap B) = \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B) \\ card\ (A \cup \bar{A}) = cardA + card\bar{A} = cardE \\ Si\ A \cap B = \emptyset, card\ (A \cup B) = cardA + cardB \\ card\ (A \times B) = cardA \times cardB \end{cases}$$

$$A \times B = \{(x, y) / \ x \in A \text{ et } y \in B\}$$

Soit E un ensemble et $(A_i)_{1 \le i \le n}$ une partition de E formée de n sous-ensembles de E finis, c'est-à-dire ces ensembles sont non vides, deux a deux disjoints et de réunion égale à E. En effet, E est fini et $Card(E) = \sum_{i=1}^{n} Card(A_i)$

Soient $E_1, \dots, E_n$ n ensembles finis ($n \ge 1$), alors le produit cartésien $E_1 \times \dots \times E_n$ est fini et

$$Card(E_1 \times \dots \times E_n) = Card(E_1) \times \dots \times Card(E_n)$$

$$Card(E^n) = (Card(E))^n$$

2. Le langage des événements

- ***Expérience aléatoire***

Une expérience est dite aléatoire lorsque son issue ne peut être prévue à priori.

- ***Eventualité***

  Le résultat d'une expérience aléatoire est appelée éventualité ou cas possible

  Exemple : obtenir le numéro « 5 » d'un dé est une éventualité.

- ***Univers*** :

  L'ensemble de toutes les éventualités est appelé univers Ω.

  Exemple : l'univers d'un dé Ω = {1, 2, 3, 4, 5,6}

- ***Evénement :***

  Un événement est une partie de l'univers,

  Par exemple

$$\begin{cases} \emptyset \ \ est\ un\ \ \text{événement}\ impossible \\ obtenir\ la\ partie\ pleine\ de\ \Omega\ \ est\ un\ evenement\ certain \\ obtenir\ un\ \text{"3" est un événement élémentaire: } \{3\} \\ \text{l'événement obtenir "5" a pour contraire "ne pas obtenir 5"} \end{cases}$$

Incompatibilité

Deux événements A et B sont incompatibles lorsqu'ils n'ont aucune réalisation possible commune. L'événement A et B est impossible, $A \cap B = \emptyset$ on dit qu'A et B sont aussi disjoints.

3. Analyse combinatoire

Deux types de situations doivent être fondamentalement distingués. L'ordre compte et ***on parle d'arrangements.*** L'ordre ne compte pas et on ***parle de combinaisons.***

3.1 Ordre compte

3.1.1 *P*-listes

Soit E un ensemble fini ayant *n* éléments et $p \in \mathbb{N}^*$. Une *p*-liste de E est une *liste ordonnée* de *p* éléments de E, distincts ou non.

L'ensemble de *p*-listes de E est le produit cartésien E^p. Le nombre de **p**-listes d'un ensemble à n élément est $\boldsymbol{n^{p}}$**.**

Exemples:

1. Le nombre de dispositions de r boules discernables dans n boîtes est n^r.

2. Si un numéro de compte bancaire est formé de 4 chiffres suivis d'une lettre quelconque, alors ***il ya*** $\mathbf{10^4 \times 26^1}$ ***numéros de compte possibles.***

3. Combien peut-on former de codes de la forme LCLCLC avec L : lettre et C : chiffre ?

Il ya $\boldsymbol{26^1 10^1 26^1 10^1}$ ***possibilités.***

3.1.2 Arrangements, Permutation, Factoriel

1.2.1 Arrangements

Soit E un ensemble à *n* éléments et $p \in \mathbb{N}^*$. Un arrangement est une p-liste d'éléments distincts de E. Le nombre d'arrangements de *p* éléments d'un ensemble à *n* éléments est :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) \qquad (p\ facteurs)$$

Par convention $A_n^0 = 1$

Exemple :

1. Si au départ d'une course, il y a 15 chevaux numérotés de 1 à 15.
   Le nombre de quartés possibles est $A_{15}^4 = 15\times14\times13\times12 = 32760$.
2. Dans une course opposant 10 athlètes, le nombre de podiums possibles est : $A_{10}^3 = 5040$

Note : Un arrangement est toujours ordonné, sans répétition possible.

1.2.2 Permutation

Une permutation d'un ensemble E ayant *n* éléments est un arrangement de *n* éléments de E.

$A_n^n = n(n-1)(n-2)\times\ldots\times2\times1 = n! \qquad (factoriel\ n)$

L'écriture factorielle de $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Il est le nombre des ***permutations sans répétition*** d'un ensemble à *n* éléments.

Par convention $\quad 0! = 1 \quad et \quad 1! = 1$

NB : Pour $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{N}^* \quad (ab)! \neq a!\,b!$

Une permutation avec répétitions de ces n éléments est une disposition ordonnée de ces éléments.
Le nombre de permutations avec répétitions de E est :

$$p_{n_1,n_2,..,n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

Exemple :
Combien de mots différents peut-on former à partir des lettres (A; B; B; C; A; D; B) ?

Il ya $\frac{7!}{2!3!} = 70$ mots possibles

3.2. L'ordre ne compte pas

3.2.1 Combinaison

Soit E un ensemble à n éléments et $p \in \mathbb{N}^*$. La combinaison de P éléments de E est une partie à p éléments de E.
Le nombre de combinaison de P éléments de E à n éléments est :

$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ Alors, pour $p \leq n$, $A_n^p = p!\, C_n^p$

Remarque : $C_n^0 = 1$ $C_n^1 = 1$ $C_n^n = 1$

3.2.2 Propriétés des nombres C_n^p

- $C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-n+p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p \quad \Leftrightarrow \; C_n^{n-p} = C_n^p$
- $si\ p > 1\ et\ n > 1$, $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$(Formule du triangle de Pascal).
- $Pour\ a, b\ \in \mathbb{N}^*\ (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$
- $pour\ a = b = 1,\ \sum_{p=0}^{n} C_n^p 1^{n-p} 1^p = \sum_{p=0}^{n} C_n^p = (1+1)^n = 2^n$.
- $Si\ \boldsymbol{E}\ est\ un\ ensemble\ fini$ à n éléments, **.**

$$cardE = n\ \ alors\ card\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{2^n},$$

$\mathcal{P}(E)\ désigne\ l'ensemble\ de\ tous\ les\ sous-ensembles\ de$ **E.**

Exemple d'application
On veut constituer un portefeuille boursier de 3 actions et 2 obligations choisies parmi 5 actions et 6 obligations. Combien de portefeuilles différents peut-on former si :

- Aucune restriction n'est imposée ?

 Il ya $C_5^3 c_6^2$ portefeuilles différents
- Deux actions particulières doivent faire partir du portefeuille ?

 Il ya $C_2^2 C_3^1 c_6^2$ portefeuilles différents
- Une action particulière doit être écartée du portefeuille ?

 Il ya $C_4^3 C_6^2$ portefeuilles différents

4. Modèles de tirage :

• Tirage avec remise

Le tirage avec remise de n boules d'une urne qui contient N boules discernables est N^n.

- **Tirage sans remise**

Soient n, N, r, b dans $\mathbb{N}^*$, avec b+r = N.
On tire une par une et sans remise n boules d'une urne contenant N boules discernables, alors :

- Le nombre de résultats possibles est A_N^n.

- Si l'urne comporte r boules rouges et b blanches, le nombre de résultats comportant :
    - une boule rouge au $j^{ème}$ tirage est $\frac{r}{N}A_N^n$
    - une boule blanche au $j^{ème}$ tirage est $\frac{b}{N}A_N^n$

Remarque : Il est à noter que ce résultat ne dépend pas de j, bien que la composition de l'urne soit modifiée au cours du tirage.

- **Tirage simultané**

Soient n, N, r, b, p dans $\mathbb{N}^*$, avec b+r = N. On tire simultanément n boules d'une urne contenant N boules discernables, alors :

Le nombre de résultats possibles est C_N^n.

L'urne comportant r boules rouges et b blanches, le nombre de résultats comportant k boules :

- Rouges est $C_r^k C_b^{n-k}$
- Blanches est $C_b^k C_r^{n-k}$

Plus généralement, si l'urne contient p catégories de boules : $r_1$boules de type c_1,⋯, r_p boules de type c_p avec $r_1, \cdots, r_p$ dans $\mathbb{N}^*$ tels que : $r_1 + \cdots + r_p = N$, le nombre de résultats comportant $k_1\ boules\ de\ type\ c_1$,⋯, $k_p$boules de type c_p, est : $C_{r_1}^{k_1} C_{r_2}^{k_2} \cdots C_{r_p}^{k_p}$.

Exemple :

On extrait une « main » de 6 cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Déterminer le nombre total de mains de 6 cartes. **Réponse :**$\boldsymbol{C_{32}^6}$

2. Déterminer le nombre de mains contenant :

    a) 6 cœurs; **Rép :** $\boldsymbol{C_8^6 C_{24}^0}$

    b) exactement 2 rois; **Rép** : $\boldsymbol{C_4^2 C_{28}^4}$

Chapitre 2 : Espaces Probabilisés

Quantifier de façon précise ce qui relève de l'incertitude, c'est l'objet du calcul de probabilités. Ce calcul utilise couramment les techniques de l'analyse combinatoire.

1. Définition générale d'une probabilité

Soit Ω un ensemble fini non vide et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Une probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est une application p de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans [0,1] qui vérifie :

- $p(\emptyset) = 0,$
- $p(\Omega) = 1$
- $A \in \Omega,\ 0 \leq P(A) \leq 1$

2. Propriétés élémentaires d'une probabilité

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- $Si\ A \cap B = \emptyset, p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- $A\ est\ dit\ quasi - impossible\ lorsque\ p(A) = 0,$
- $A\ est\ quasi - certain\ si\ p(A) = 1$
- $Si\ \bar{A}$ désigne l'événement contraire de A, $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
- $Si\ A_1,\ A_2, \dots, A_n$ forment un système complet d'événements, c'est à dire s'ils forment une partition de Ω et deux à deux disjoints, alors

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) = 1$$

3. Cas d'équiprobabilité

Dans le cas où tous les événements élémentaires sont équiprobables, la probabilité de chacun d'eux est $\frac{1}{card\ \Omega}$.

Pour tout événement A, on a $p(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega} = \frac{Nbre\ de\ cas\ favorables}{Nbre\ de\ cas\ possibles}$

Exemple

Événement A « Obtenir un résultat supérieur ou égal à 5 lors d'un lancer de dé » a pour probabilité $p(A) = p(\{5,6\}) = p(\{5\}) + p(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

Exercices d'application

Exercice 1

Dans une loterie on émet des carnets de 20 billets tels que dans chaque carnet, un billet gagne 30F, deux billets gagnent 10F, 5 billets gagnent 5F et 12 billets ne gagnent rien.

Une personne achète deux billets d'un même carnet. Quelle est la probabilité :

a) A « qu'elle ne gagne rien » ? $\boldsymbol{p(A) = \frac{C_{12}^2 C_8^0}{C_{20}^2}}$

b) B « qu'elle gagne 30F » ? $\boldsymbol{p(B) = \frac{C_1^1 C_{12}^1}{C_{20}^2}}$

c) C « qu'elle gagne 10F » ? $\boldsymbol{p(C) = \frac{C_2^1 C_{12}^1}{C_{20}^2} + \frac{C_5^2 C_{12}^0}{C_{20}^2}}$

d) D « que les deux billets soient gagnants » ? $\boldsymbol{p(D) = \frac{C_8^2}{C_{20}^2}}$

Exercice 2

Deux cartes sont tirées d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité que les deux cartes soient de pique, si on effectue un tirage :

a) A « sans remise » ? $\boldsymbol{p(A) = \frac{A_8^2}{A_{32}^2}}$

b) B « avec remise de la première carte tirée » $\boldsymbol{p(B) = \frac{8^2}{32^2} = (\frac{8}{32})^2}$

Exercice 3

Dans une loterie, 100 billets sont vendus et il ya 7 billets gagnants. Quelle est la probabilité de gagner au moins un lot si on achète

a) A « un billet » ? $\boldsymbol{p(A) = 1 - \frac{C_{93}^1}{C_{100}^1} = \frac{7}{100}}$

b) B « deux billets » ? $\boldsymbol{p(B) = 1 - \frac{C_{93}^2}{C_{100}^2}}$

Exercice 4

Une urne contient 5 boules : 3 blanches numérotées 1, 2 et 3 et 2 noires numérotées 4 et 5. Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire deux boules simultanément et on s'intéresse à la couleur de ces boules tirées.

1) Proposer un univers correspondant à ce problème et qui vérifie la propriété d'équiprobabilité.

Ω = {1, 2, 3, 4,5}

2) Décrire dan cet univers les événements suivants :

a) A : « les deux boules sont blanches » ; $\boldsymbol{p(A) = \frac{C_3^2}{C_5^2}}$

b) B : « les deux boules sont noires » **;** $\boldsymbol{p(B) = \frac{C_2^2}{C_5^2}}$

c) C : « les deux boules sont de couleurs différentes » $\boldsymbol{p(C) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2}}$

d) D : « les deux boules sont de la même couleur » $\boldsymbol{p(D) = \frac{C_3^2 + C_2^2}{C_5^2}}$**.**

4. Le modèle de l'urne

4.1 Distribution hypergéométrique

Une urne contient N boules dont a blanches et b noires. Soient $n, r \in \mathbb{N}$ tels que : $o \leq r \leq n \leq N = a + b$

On extrait n boules au hasard de cette urne, <u>par lot ou sans remise</u>, alors, la probabilité exactement r boules blanches est : $\frac{C_a^r C_b^{n-r}}{C_{a+b}^n}$

4.2 Généralité : l'urne multicolore

D'une manière générale, lorsque une urne contient $a_1$boules de couleurs $c_1, \cdots, a_k$ boules de couleurc_k. On extrait n boules au hasard de cette urne, ***<u>par lot ou sans remise</u>***. Alors la probabilité d'obtenir exactement : $r_1$boules de couleur$c_1, \cdots, r_k$ boules de couleur$c_k$est ($r_1 + \cdots + r_k = n \leq a_1 + \cdots + a_k$) :

$$\frac{C_{a_1}^{r_1} C_{a_2}^{r_2} \cdots C_{a_n}^{r_n}}{C_{a_1 + \cdots + a_k}^n}$$

4.3 Distribution binomiale

Une urne finie U contient une proportion p de boules blanches (avec p dans [0,1]). On extrait n boules au hasard de cette urne, ***<u>avec remise</u>.*** Alors la probabilité d'obtenir exactement r boules blanches est: $C_n^r p^r (1-p)^{n-r}$

4.4 Généralisation

Une urne contient $a_1$boules de couleur $c_1, \cdots, a_k$ boules de couleurc_k. On extrait n boules au hasard de cette urne, ***avec remise***. Alors la probabilité d'obtenir exactement : $r_1$boules de couleur$c_1, \cdots, r_k$ boules de couleur $c_k$est :

$$\frac{(r_1 + \cdots + r_k)!}{r_1!\, r_2! \cdots r_k!} p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$$

5. Probabilité conditionnelle

5.1 Définition

Soit Ω un univers muni d'une probabilité p et A un événement de probabilité non nulle. Pour tout événement B (B ϵ $\mathcal{P}(\Omega)$), la probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé est :

$$p_A(B) = p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \ ou \ \frac{card(A \cap B)}{card(A)}$$

On déduit que $p_A(B) \times p(A) = p(A \cap B)$

Remarques

- $si\ A \subset B,\ alors\ A \cap B = A \ \ et \ \ p(B/A) = 1$
- $si\ B \subset A,\ alors\ A \cap B = B \ \ et \ \ p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(B)}{p(A)}$

Propriétés

- Pour tout événement B, $p_A(B) \in [0,1]$
- Si $B_1 et\ B_2$ sont deux événements incompatibles selon A, alors
$$p_A(B_1 \cup B_2) = p_A(B_1) + p_A(B_2)$$
- Sinon $p_A(B_1 \cup B_2) = p_A(B_1) + p_A(B_2) - p_A(B_1 \cap B_2)$
- $Si\ \bar{B}$ désigne l'événement contraire de B, alors
$$p_A(\bar{B}) = 1 - \ p_A(B)$$
- La formule des probabilités composées est définie par :
$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$$
- Trois événements A, B et C
$$p(A \cap B \cap C) = p(A) \times p_A(B) \times p_{A \cap B}(C)$$
- $Pour\ n$ événements $A_1,\ A_2, \cdots, A_n$

$p(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = p(A_1) \times p(A_2/A_1) \times p(A_3/A_2 \cap A_1) \times \cdots \times p(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$

Exemple

Trois candidats se présentent à une élection. La répartition des votes selon le candidat et le sexe du votant est donnée par le tableau ci-dessous:

		Candidats			Total
		A	B	C	
Sexe	F : femme	42%	13%	5%	60%
	H : homme	28%	7%	5%	40%
Total		70%	20%	10%	100%

On choisit au hasard l'un des votants.

1. La probabilité pour que la personne choisie ait votée A, sachant que c'est une femme, est :

$$p_F(A) = \frac{p(A \cap F)}{p(F)} = \frac{0{,}42}{0{,}6} = 0{,}7$$

2. La probabilité pour que la personne choisie soit un homme, sachant qu'elle a voté C, est :

$$p_C(H) = \frac{p(H \cap C)}{p(C)} = \frac{0{,}05}{0{,}1} = 0{,}5$$

5.2. Événements indépendants

- Les événements A et B sont indépendants si $p_A(B) = p(B)$
  Si $p(B) \neq 0, cela\ equivaut$ à $p_B(A) = p(A)$
- Les événements A et B sont indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$
- Trois événements A, B et C sont indépendants lorsqu'ils sont deux à deux indépendants et sont mutuellement indépendants lorsque
  $p(A \cap B \cap C) = p(A) \times p(B) \times p(C)$.

De même pour leurs événements contraires.

Note:

- A et B sont indépendants, alors : $\bar{A}$ et B sont indépendants, et de même $\bar{A} et \bar{B}$ sont indépendants.
- Evénements indépendants ≠ événements incompatibles.

6. Probabilités totales et théorème de Bayes

6.1 Formule des probabilités totales

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements réalisant une partition de l'univers Ω. C'est-à-dire n événements non vides, deux à deux disjoints et dont la réunion est l'univers Ω. Alors pour tout événement B,

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} p({}^{B}/_{A_i}) \times p(A_i)$$

En particulier, $si\ \bar{A}$ désigne l'événement contraire de A,

$B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$ et $(B \cap A) \cap (B \cap \bar{A}) = \emptyset$

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A})$$

En utilisant la formule des probabilités composées, on aura

$$p(B) = p(A) \times p\left({}^{B}/_{A}\right) + p(\bar{A}) \times p({}^{B}/_{\bar{A}})$$

6.2 Formule de Bayes

De la formule :

$p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$

On déduit

$p\left({}^{A}/_{B}\right) = \frac{p(A) \times p({}^{B}/_{A})}{p(B)} = \frac{p(A) \times p({}^{B}/_{A})}{p(A) \times p({}^{B}/_{A}) + p(\bar{A}) \times p({}^{B}/_{\bar{A}})}$

Cette formule permet de calculer $p\left({}^{A}/_{B}\right)$ grâce à $p\left({}^{B}/_{A}\right)$ ou $p\left({}^{B}/_{A}\right)$ grâce à $p\left({}^{A}/_{B}\right)$.

$p(A_i/B) = \frac{p(A_i) \times p(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(A_i) \times p(B/A_i)}$ avec $\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = 1$

Exercices d'application

Exercice 1

Un appareil peut être monté avec des pièces de haute qualité (40% des cas) et avec des pièces ordinaires (60% des cas). Dans le premier cas, sa fiabilité (probabilité de fonctionnement) sur une durée t est égale à 0,95 ; dans le second, elle est de 0,7. L'appareil a été soumis à un essai et s'est avéré fiable (fonctionnement sans défaillance sur la durée de référence). Déterminer la probabilité que l'appareil soit composé de pièces de haute qualité.

Solution

Notons B l'évènement "l'appareil a fonctionné sans défaillance" : U_1 $(resp\ U_2)$la probabilité qu'un appareil soit composé de pièces de haute qualité (resp. de qualité ordinaire), $P(U_1) =$ 0,4 (resp. $P(U_2) = 0{,}6$)

$P(B/U_1) = 0.95\ \ et\ P(B/U_2) = 0.7$

En appliquant le théorème de Bayes, nous obtenons :

$$p\left({}^{U_1}/_{B}\right) = \frac{p(U_1)\times p\left({}^{B}/_{U_1}\right)}{p(B)}$$

$$= \frac{p(U_1)\times p\left({}^{B}/_{U_1}\right)}{p(U_1)\times p\left({}^{B}/_{U_1}\right)+p(U_2)\times p\left({}^{B}/_{U_2}\right)} = \frac{0{,}4\times 0{,}95}{0{,}4\times 0{,}95+0{,}6\times 0{,}7} = \frac{0{,}38}{0.8} = 0{,}475$$

Exercice 2

A et B sont deux événements tels que $p(A) = \frac{1}{5}$, $p(B) = \frac{1}{3}\ et\ p(A/B) = \frac{1}{4}$

1) Calculer $p(A\cap B), p(A\cup B),\ \ p(A/\bar{B})$

2) A et B sont-ils indépendants ?

Réponse :

1) Calculons $p(A\cap B), p(A\cup B),\ \ p(A/\bar{B})$

- $p(A\cap B) = p(A/B)\times p(B) = \ {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{12}}$,
- $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = {}^{\mathbf{9}}/_{\mathbf{20}}$
- $p(A) = p(B)p(A/B) + p(\bar{B})p(A/\bar{B}) \Rightarrow\ p(A/\bar{B}) = \frac{p(A)-p(B)p(A/B)}{p(\bar{B})} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{40}}$

2) A et B sont indépendants ssi $p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$

$p(A\cap B) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}$ et $p(A)\times p(B) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{15}}$

A et B ne sont pas indépendants.

Exercice 3

Trois machines A, B et C produisent respectivement 60%, 30% et 10% du nombre total de pièces fabriquées dans une usine. Les pourcentages de résultats défectueux de ces machines sont respectivement 2%, 3% et 4%. On choisit une pièce au hasard et on s'aperçoit qu'elle est défectueuse, calculer la probabilité pour que cette pièce ait été produite par la machine C ?

Solution

$$\boldsymbol{p(A) = 0{,}6\,; p(B) = 0{,}3\ \ et\ p(C) = 0{,}1}$$

Notons D « pièce défectueuse »

$$\boldsymbol{p(D/A) = 0,02 \quad p(D/B) \ = 0,03 \ \ et\, p(D/C) = 0,04}$$

$$\boldsymbol{p(C/D) = \frac{p(D \cap C)}{p(D)} = \frac{p(D/C)p(C)}{p(D/A)p(A) + p(D/B)p(B) + p(D/C)p(C)} = 0,16}$$

Chapitre 3 : Variables aléatoires réelles et leurs caractéristiques

3.1 Notion d’expérience aléatoire

Une expérience est dite aléatoire lorsque son issue ne peut être prévue à priori.

Exemple : Le lancé d'un dé est une expérience aléatoire.

3.2. Définition générale d'une variable aléatoire

Une variable aléatoire (v. a.) est une grandeur dépendant du résultat d'une expérience aléatoire, c'est-à dire non prévisible à l'avance avec certitude.
Une variable aléatoire réelle X (lorsque sa réalisation) est un caractère quantitatif, discret ou continu, dont la valeur est fonction du résultat de l'expérience :

$X: \Omega \rightarrow E\ (ou\ \mathbb{R})$, où E est l'ensemble des valeurs possibles de Ω.

3.3. Variable aléatoire discrète (v.a.d) et caractéristiques

3.3.1 Définition

La variable aléatoire X est dite discrète si elle ne prend que des valeurs ponctuelles en nombre fini ou dénombrable, parfois même infini.

3.3.2 Loi de probabilités et fonction de répartition

Les valeurs d'une variable aléatoire discrète X sont notées x_i. A chaque valeur x_i on associe une probabilité $p_i = p(X = x_i)$.

- ***La loi de probabilité*** de X est l'ensemble des couples

  $\left(x_i, p(X = x_i)\right)\ pour\ i\ \in [1, n]$ avec $\sum p_i = 1$

Lorsque les valeurs x_i sont en nombre fini, on a alors le tableau ci-dessous.

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	Total
$p(X = x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

Exemple

On lance deux pièces de monnaie. L'ensemble fondamental comprend 4 événements élémentaires notés PP; PF; FP; FF, de probabilité pour chacun est 1/4. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de piles obtenus.

X prend les valeurs 0; 1; 2.

$$p(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad p(X = 1) = \frac{1}{2} \quad et \quad p(X = 2) = \frac{1}{4}$$

On représente souvent la loi de probabilité à l'aide d'un tableau :

X	0	1	2	Total
$p(X = x)$	¼	½	1/4	1

Il est appréciable de pouvoir visualiser une distribution de probabilités. Dans ce cas on peut utiliser des diagrammes en barres ou bâtons.

- La ***fonction de répartition*** F de X ou fonction cumulative des probabilités est la fonction de ℝ vers [0,1] qui a tout nombre réel x, associe la probabilité que X soit inferieure ou égale à x.

$$F(x) = p(X \leq x)$$

Elle est constante par intervalle, croissante au sens large et en escalier.

$$F(x_i) = p(X \leq x_i) = p_1 + p_2 + \cdots + p_i$$

X	< 0	0	1	2	Total

$p(X = x)$		¼	½	1/4	1
$p(X \leq x)$	0	¼	¾	1	

- **Propriétés**

1. F est une fonction en escalier croissante, continue à droite.
2. $Si\ x < x_1$, alors $F(x) = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
3. $Si\ \ x_j \leq x \leq x_{j+1},\ alors\ \ F(x) = \sum_{i=1}^{j} p_i.$
4. $Si\ x \geq x_n,\ alors\ F = 1.$

3.3.3 Caractéristiques

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ et les probabilités

$$p_i = p(X = x_i)\ pour\ i\ allant\ de\ 1 \text{ à } n$$

- ***Esperance Mathématique (moyenne)***

L'espérance de X, notée E(X) ou $\overline{X}$, est donnée par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1.x_1 + p_2.x_2 + \dots + p_n.x_n$$

- ***Variance***

La variance de X, notée V(X), est donnée par :

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^{n} p_i.(x_i - E(X))^2$$
$$= p_1.(x_1 - E(X))^2 + p_2.(x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n.(x_n - E(X))^2$$

$ou\ V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{l=1}^{n} p_i.x_i^2 - E(X)^2$

- ***Ecart type***

L'écart type de X, $\sigma(X)$, est donné par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Propriétés :

Pour tous réels a et b

- E (a) = a
- E (a X+b) = a E(X) + b
- V (a X+b) = $a^2 V(X)$
- V(a) = 0
- V(-X) = V(X)
- $\sigma(aX + b) = \sqrt{a^2 V(X)} = |a|\sigma(X)$

Pour X une variable aléatoire, on appelle variable centrée réduite la variable aléatoire $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$

Y est alors telle que $E(Y) = 0\ \ et\ \sigma(Y) = 1$

Exercices d'application

Exercice 1

Un joueur met 100F et lance deux fois de suite de façon indépendante un dé cubique parfaitement équilibré.

- Si l'écart des points entre les deux lancers est supérieur ou égal à 4, alors le joueur reçoit 250F;

- Si l'écart est égal à 2 ou 3, alors le joueur reçoit 50F;
- Si l'écart est 0 ou 1, il ne reçoit rien (le joueur perd toujours sa mise de 100F).

Solution

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique
X= {150, -50, -100}
- Probabilité pour que l'écart des points soit supérieur ou égal à 4 est $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
- Probabilité pour que l'écart des points soit égal à 2 ou 3 est $\frac{14}{36} = \frac{7}{18}$
- Probabilité pour que l'écart des points soit égal à 0 ou 1 est $\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

D'où la loi de probabilité

X	150	-50	-100
P(X=x)	1/6	7/18	4/9

E(X) = -39 F V(X) = 7654 $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 87{,}5F$

Exercice 2 (à domicile)

On lance simultanément deux dés bien équilibrés. On note X la valeur absolue de la différence des nombres portés sur les faces supérieures.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Calculer E(X) et Var(X).

Exercice 3 (à domicile)

Un fabricant a estimé que le nombre de ventes journalières d'un de ses articles peut varier de 0 à 5 avec les probabilités suivantes.

Nombre de ventes : x_i	0	1	2	3	4	5
Probabilités : p_i	0,10	0,15	0,30	0,20	0,15	0,10

1. Tracer la fonction de répartition de X ?
2. Calculer l'espérance mathématique E(X), la variance V(X) et l'écart type$\sigma(X)$.

Exercice 4

Une urne contient 6 boules blanches et 6 boules noires indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules de l'urne. La variable aléatoire X est égale au nombre de boules blanches restant dans l'urne après le tirage.

1) Déterminer la loi de probabilité de X
2) Définir la fonction de répartition de la variable
3) Calculer son espérance mathématique E(X).

Solution

1) Loi de probabilité de X= {3, 4, 5, 6}

- Trois boules blanches tirées, « reste 3 » $p = \frac{C_6^3}{C_{12}^3}$
- Deux boules blanches tirées, « reste 4 » $p = \frac{C_6^4 C_6^1}{C_{12}^3}$
- Une boule blanche tirée, « reste 5 » $p = \frac{C_6^5 C_6^2}{C_{12}^3}$
- zéro boule blanche tirée, $p = \frac{C_6^3}{C_{12}^3}$

	3	4	5	6	Total
Probabilités : p_i	$\frac{1}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{11}$	1

2) La fonction de répartition de la variable

X	< 3	3	4	5	6	Total
$p(X \leq x)$	0	$\frac{1}{11}$	$\frac{11}{22}$	$\frac{20}{22}$	1	

3) Esperance Mathématique

$$E(X) = \sum x_i p_i = \frac{6}{22} + \frac{36}{22} + \frac{45}{22} + \frac{12}{22} = \frac{99}{22}$$

Exercice 5 (à domicile)

Soit X la variable aléatoire discrète qui correspond au nombre de pannes que doit gérer un service après vente dans une semaine. La loi de probabilité de X est donnée par :

X	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
P(X=x)	*1/9*	*M*	*1/9*	*n*	*4/9*

De plus, l'espérance mathématique de la variable X est égale à 25/9.

1) Déterminer *n et m*

2) On appelle Y la variable aléatoire correspondant au coût du service de dépannage. Ce coût est composé d'un coût fixe 500 FCFA et un coût de 200 FCFA par panne.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

b) Calculer E(Y), E(Y^2) et l'écart type de Y.

3.4 Variable aléatoire continue (v.a.c)

3. 4.1 Définitions

Une ***variable aléatoire X est continue*** lorsqu'elle prend toutes les valeurs d'un intervalle, borné ou non, de l'ensemble des nombres réels ℝ.

On appelle ***densité de probabilité***, toute application f : ℝ→ ℝ+ intégrable et telle que $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$

Si, f est continue presque partout, on dit que f est une densité de probabilité d'une variable absolument continue.

On note ***F la fonction de répartition*** de X définie par :

F: ℝ→ $[0,1]$ $x \mapsto p(X \leq x)$

- $Pour\ tout\ x\ \in \mathbb{R},\ F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$
- La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$

Les probabilités se calculent par intégration de la fonction densité de probabilité

$$p(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(t)dt$$

Remarque: En loi continue on ne distingue pas $<\ et\ \leq$.

Comme p (X= a) = 0, on a

$$p(X \leq a) = p(X < a) + p(X = a) = p(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

De même

$$p(a \leq x \leq b) = p(X \leq b) - p(X \leq a) = p(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$p(X \geq x) = p(X > x) = 1 - p(X \leq x) = 1 - F(X) = \int_{x}^{+\infty} f(t)dt$$

Toute fonction vérifiant les cinq propriétés ci-dessous peut être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire absolument continue.

1. $F\ est\ croissante\ (au\ sens\ large)$
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0\ et\ \lim_{x \to -\infty} F(x) = 1$
3. $F\ est\ continue$ à droite ***si de plus***
4. $F\ est\ croissante\ sur\ tout\ \mathbb{R}$
5. $F\ est\ derivable\ presque\ partout$

3.4. 2. Caractéristiques d'une variable aléatoire continue X

Sous réserve de convergence des intégrales, on définit :

- L'espérance mathématique de X est définie par :
  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\, dt$
- La variance est définie par :

$$V(X) = E\big(X - E(X)\big)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [t - E(X)]^2 f(t)dt$$

$$= E(X^2) - E(X)^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt\right] - E(X)^2$$

- L'écart type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Interprétation: Lorsque :

$$\begin{cases} V(X) \geq 0 \\ V(X) = 0\ \leftrightarrow X\ est\ presque\ certaine \\ V(X) = E(X^2) - E(X)^2\ (formule\ de\ Koening - Huygens \\ V(X) \neq 0, alors\ \dfrac{X}{\sigma(X)}\ est\ réduite\ et\ \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}\ est\ centrée\ et\ réduite \end{cases}$$

- $\sigma(X) \geq 0, et\ \sigma(X) = 0\ si\ et\ seulement\ si\ X\ est\ quasi\ certaine.$
- $Lorsque\ \sigma(X) = 1\ ou\ V(X) = 1, on\ dit\ que\ X\ est\ une\ v.a\ réduite$.
  Plus la variance de X est petite, plus les réalisations de X seront concentrées autour de son espérance.

Le coefficient de X définie par $CV(X) = \frac{\sigma(X)}{E(X)}$ est aussi un indicateur de dispersion, dont l'avantage est d'être sans dimension. En pratique, on considère que, quand CV(X) est inferieur à 15%, l'espérance peut être considérée comme un bon résumé de la loi.

Exercice d'application

Soit X une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité f est définie par :

$$f(t) = ke^{-|t|} \; pour\ tout\ t\ appartenat \text{ à } \mathbb{R}$$

Déterminer k, l'espérance de X et la variance de X.

Solution

Pour que la fonction f, qui est positive, soit une densité de probabilité, il faut que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

La fonction est aussi paire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \; = 2\int_{0}^{+\infty} ke^{-t}dt = 1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{k = 1/2 \text{ et } } \boldsymbol{f(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}}$$

Il est évident que l'espérance mathématique soit nulle.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}te^{-|t|}dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}te^{t}\,dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2}te^{-t}\,dt = 0$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}t^2e^{-|t|}dt = \int_{0}^{+\infty} t^2e^{-t}\,dt = 2$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2}$$

3.5 Esperance mathématique d'une fonction

Plus généralement, on peut s'intéresser à l'espérance mathématique d'une fonction de X sans avoir à déterminer sa loi :

- Si X est une v.a.d $E\big(\varphi(X)\big) = \sum_{x_i \in E} \varphi(x_i)p(X = x_i)$
- Si X est une v.a.c $E\big(\varphi(X)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f(x)\big)dx$

Deux espérances de ce type sont particulièrement utiles :

- Si X est une v.a.d, si sa **fonction génératrice** est définie par :
  $G(z) = E(z^X) = \sum_{x_i \in E} z^{x_i}p(X = x_i)$
- Si X est une v.a.c, si sa **fonction caractéristique** est définie par :
  $\phi(t) = E\big(e^{itX}\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f(x)dx$

3.6 Inégalités fondamentales de Markov, Tchebychev

- **Inégalité de Markov**

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé. On suppose de plus que X prend des valeurs positives, et possède une espérance $m,\ avec\ m > 0$. L'inégalité de Markov indique que pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$p(X \geq \boldsymbol{\lambda m}) \leq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}}$$

- **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé. On suppose que X possède une espérance m, et une variance $\sigma^2 > 0$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev indique que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$p(|X-m| \geq \boldsymbol{\varepsilon}) \leq \frac{\boldsymbol{E(|X-E(X)|^2)}}{\boldsymbol{\varepsilon^2}} = \frac{\boldsymbol{V(\varepsilon)}}{\boldsymbol{\varepsilon^2}} = \frac{\boldsymbol{\sigma^2}}{\boldsymbol{\varepsilon^2}}$$

$$p(|X-m| \leq \boldsymbol{\varepsilon}) \geq \mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{\sigma^2}}{\boldsymbol{\varepsilon^2}}$$

3.7. Les moments d'une variable aléatoire

- Soit k∈ℕ, le **moment d'ordre k** de X est $m_k(X) = E(X^k)$ et
- Le moment centré d'ordre k est $\mu_k(X) = m_k\big(X - E(X)\big) = E[X - E(X)]^k$
- L'espérance mathématique E(X) est le moment d'ordre 1 notée $m_1(X)$
- La variance est le moment centré d'ordre 2 noté $\mu_2(X)$ est définie par :

$\mu_2(X) = E(X^2) - E(X)^2 = m_2(X) - m_1^2(X)$

$$\begin{cases} \mu_2(X) = m_2\big(X - E(X)\big) = \sum \big(x - E(X)\big)^2 p(X = x) \quad pour\ le\ cas\ discret \\ \mu_2(X) = m_2\big(X - E(X)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x - E(X)\big)^2 fx\, dx \quad pour\ le\ cas\ continu \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2(X) = \sum_{I=1}^{n} p_i . x_i^2 \quad pour\ le\ cas\ discret \\ m_2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \quad pour\ le\ cas\ continu \end{cases}$$

3. 8. Quantiles ou fractiles

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F et $\alpha \in]0,1[$. On appelle quantile d'ordre α (ou $\alpha - quantile$) de la loi de X, tout nombre réel x_α tel que

$$p(X < x_\alpha) \leq \alpha \leq p(X \leq x_\alpha)$$

Si F est continue et strictement croissante (donc inversible), on a:

$p(X < x_\alpha) = p(X \leq x_\alpha) = F(x_\alpha) = \alpha$, d'où $x_\alpha = F^{-1}(\alpha)$

Si F est constante égale à α sur un intervalle [a, b], n'importe quel réel de [a, b] est un quantile d'ordre α.

En général, on choisit de pendre le milieu de [a, b].

Si F est discontinue en k et telle que $\lim\limits_{x \to k} F(x) < \alpha \leq F(k)$, alors $x_\alpha = k$

Notes

- *Pour* $\alpha = \frac{1}{2}$, *on parle de médiane* ↔ $\int_{-\infty}^{M_e} f(x)dx = 0{,}5$
- *Lorsque la v.a X est continue, le mode* M_0 *satisfait à*

$$f'(M_0) = 0\ et\ f''(M_0) < 0$$

- Q_1 *est le quantile d'ordre* $\frac{1}{4}$ *et* Q_3 *est le quantile d'ordre 3/4.*
- *Le milieu de l'intervalle quartile est* $\frac{Q_1+Q_3}{2}$
- *Un des indicateurs de forme comme,* $I_F = \frac{Q_3+Q_1-2Q_2}{Q_3-Q_1}$

$$\begin{cases} -1 \leq I_F \leq 1 \\ I_F = 0,\ \ pour\ une\ distributionsymetrique \\ I_F < 0, pour\ une\ distribution\ unimodale\ etalee\ vers\ la\ droite \\ I_F > 0, pour\ une\ distribution\ unimodale\ etalee\ vers\ la\ gauche \end{cases}$$

Exercices (à domicile)

Exercice 1

La quantité de pain (en centaines de kilogrammes) qu'une boulangerie vend en une journée est une variable aléatoire X de fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} mx & si \quad 0 \leq x \leq 3 \\ m(6-x) & si \quad 3 \leq x \leq 6 \\ 0 & sinon \end{cases} \qquad \text{où m est un réel constant}$$

1) Calculer la valeur de m
2) Quelle est la fonction de répartition de X ?
3) Soit A l'événement : « le nombre de kilos de pain vendus dans une journée est supérieure à 300kg ».

Soit B l'événement « le nombre de kilos de pain vendus dans une journée est compris entre 150 et 450 kg ».

Les événements A et B sont ils indépendants ?

Exercice 2

Soit la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} kx & 0 \leq x < 2 \\ k(4-x) & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1) Pour quelle valeur de k, f est-elle une densité de probabilité ?
2) Calculer $p(0{,}5 \leq x \leq 2{,}5)$
3) Calculer $E(x)$, $E(2x+5)$, $E(x^2+2x+5)$

Exercice 3

Soit la fonction à densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1+x^2) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Si $E(x) = \mu \ et \ V(x) = \sigma^2$, calculer $p(|x-\mu| < \sigma) = p(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma)$

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire continue a valeurs dans [0,3],

Soit $p(X > x) = a + bx^3, \quad 0 \leq x \leq 3$

a) Trouver $a \ et \ b, F(x) \ et \ f(x)$

b) Montrer que $E(x) = 2{,}25$

c) Calculer σ_x